Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων, Τμήμα Μαθηματικών, Διδάσκων: Ιωάννης Γιαννούλης

ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΙΙΙ

12 Ιουνίου 2018

Θέμα 1. [0.7+0.8]

(α') Δείξτε ότι για κάθε $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^n$ ισχύει $|\bar{x} \cdot \bar{y}| \leq \|\bar{x}\|\|\bar{y}\|$, όπου $\bar{x} \cdot \bar{y}$ το Ευκλείδειο (ή κανονικό) εσωτερικό γινόμενο των $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^n$.

(β') Δείξτε ότι η $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ με $\|\bar{x}\| := \sqrt{\bar{x} \cdot \bar{x}}$ είναι νόρμα στον $\mathbb{R}^n$.

Θέμα 2. [0.6+0.4+0.5]

(α') Διατυπώστε τον ακολουθιακό χαρακτηρισμό της συμπάγειας του $U \subset \mathbb{R}^n$ και δείξτε με αυτόν ότι: $U \subset \mathbb{R}^n$ συμπαγές και $\bar{f} : U \to \mathbb{R}^m$ συνεχής $\Rightarrow \bar{f}(U) \subset \mathbb{R}^m$ συμπαγές.

(β') Δείξτε ότι κάθε συγκλίνουσα ακολουθία του $\mathbb{R}^n$ είναι φραγμένη.

(γ') Έστω $\bar{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ σημείο συσσώρευσης του $V \subset \mathbb{R}^n$ και $\bar{f}, \bar{g} : V \to \mathbb{R}^m$ με $\lim_{\bar{x} \to \bar{x}_0} \bar{f}(\bar{x}) = \bar{a} \in \mathbb{R}^m$, $\lim_{\bar{x} \to \bar{x}_0} \bar{g}(\bar{x}) = \bar{b} \in \mathbb{R}^m$. Δείξτε ότι $\lim_{\bar{x} \to \bar{x}_0} (\bar{f}(\bar{x}) \cdot \bar{g}(\bar{x})) = \bar{a} \cdot \bar{b}$.

Θέμα 3. [1.5]

Έστω $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με $f(x, y) = x^2 + y^2$ για $x = y$ και $f(x, y) = 0$ για $x \neq y$. Εξετάστε την f σε κάθε σημείο $(x, x) \in \mathbb{R}^2$ ως προς τη συνέχεια, μερική διαφορισιμότητα και διαφορισιμότητά της.

Θέμα 4. [1]

Για $f \in C^{k+1}(\mathbb{R}^n)$, $k \in \mathbb{N}_0$, και $\bar{x}, \bar{\eta} \in \mathbb{R}^n$ ισχύει ο τύπος του Taylor

$$f(\bar{x} + \bar{\eta}) = \sum_{|\alpha| \leq k} \frac{D^\alpha f(\bar{x})}{\alpha!} \bar{\eta}^\alpha + \sum_{|\alpha| = k+1} \frac{D^\alpha f(\bar{x} + \vartheta \bar{\eta})}{\alpha!} \bar{\eta}^\alpha \quad \text{για κάποιο} \quad \vartheta \in [0, 1].$$

Δείξτε ότι υπάρχει μια συνάρτηση $\vartheta : \mathbb{R}^2 \to [0, 1]$, για την οποία ισχύει

$$\sin(x + y) = x + y - \frac{1}{2}(x^2 + 2xy + y^2) \sin(\vartheta(x, y)(x + y)) \qquad \forall\ (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Θέμα 5. [0.5+0.5]

Έστω $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2,\ x \in [-1, 1]\}$ η απλή καμπύλη από το $(-1, 1)$ στο $(1, 1)$.

(α') Βρείτε το μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα σε κάθε σημείο της C.

(β') Έστω $f(x, y) = x^3 y^3$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Βρείτε σε κάθε σημείο της C την παράγωγο της f στην κατεύθυνση του μοναδιαίου εφαπτόμενου διανύσματος στο σημείο αυτό.

Θέμα 6. [1]

Έστω $f(x, y) = x^2 y^2$, $(x, y) \in [-1, 1] \times [-1, 1]$. Βρείτε τα τοπικά και ολικά ακρότατα της f.

Θέμα 7. [1]

Έστω $f : K \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = xy$, όπου $K \subset \mathbb{R}^2$ ο μοναδιαίος κύκλος κέντρου $(0, 0)$. Βρείτε τα τοπικά και ολικά ακρότατα της f.

Θέμα 8. [1.5]

Έστω $U = (0, +\infty) \times (-\pi/2, \pi/2) \subset \mathbb{R}^2$ και $\bar{f} : U \to \mathbb{R}^2$ με $\bar{f}(r, \varphi) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi)$. Δείξτε ότι η $\bar{f}$ είναι $1-1$ και οι $\bar{f}$ και $\bar{f}^{-1} : \bar{f}(U) \to U$ συνεχώς διαφορίσιμες και δώστε ρητά τις παραγώγους τους, το $\bar{f}(U) \subset \mathbb{R}^2$ και την $\bar{f}^{-1}$.

Δικαιολογήστε τις απαντήσεις σας! ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!